R. Müller

BRG III, Wien

Beispiele und Gedanken zum Einsatz des TI-92

Vorwort

Nach Aussagen von TEXAS INSTRUMENTS hat Österreich heute weltweit die höchste Verbreitungsdichte an den neuen TI-92-Geräten, und leistet somit - ähnlich wie durch den Ankauf von DERIVE durch das BMUK - eine Vorreiterrolle in der Weiterentwicklung und Neuorientierung des Mathematikunterrichts. An einigen schulrelevanten Beispielen aus der AHS soll auf Möglichkeiten und Vorteile einer solchen Entwicklung eingegangen werden, ebenso wie natürlich auch auf etwaige Gefahren und Fehlentwicklungen - und wie man diesen unschwer begegnen könnte.

Ohne jeden Zweifel ist Unterrichten immer ein von unzähligen Antinomien geprägter Prozess, seien es Antinomien der Erziehung, der Methode etc. Immer bringt die Betonung eines Weges in diesem Prozess für den einen "Pol" Vorteile, für den "Gegenpol" Nachteile, wobei die "Pole" durch den steten Wandel des kulturellen, technischen etc. Umfeldes ihrerseits einem steten Wandel unterworfen sind. Die Veränderung des technischen Umfeldes durch die Markteinführung des TI-92 bedeutet dabei meines Erachtens einen "Quantensprung" für den Unterricht, mehr noch als die Einführung des Taschenrechners.

Ein unleugbarer Vorteil ist die allgegenwärtige Präsenz des Gerätes im Unterricht, was uns als Lehrer die Möglichkeit gibt, es immer genau dann einsetzen zu können, wann wir dies für richtig und zweckmäßig halten. Dem steht - wie schon beim Taschenrechner - ein möglicher "Missbrauch" für Aufgaben zu, die leichter "händisch" wie auch vom Unterrichtsziel her besser "im Kopf" bearbeitet werden könnten. Ich denke hier an die Fähigkeit zur Herstellung aussagekräftiger, auf das Wesentliche hin orientierter Skizzen oder an Überschlagsrechnungen und Größenordnungsabschätzungen.

Ein unleugbarer Vorteil ist die "Omnipotenz" des Gerätes, welches neben Arithmetik, Algebra, Analysis und Stochastik auch konstruktive Geometrie sowohl koordinatengebunden als auch (scheinbar) koordinatenungebunden beherrscht, darüber hinaus aber auch eine (BASIC-ähnliche) Programmierung wie auch Elemente einer Tabellenkalkulation und eines einfachen Texteditors zur Verfügung stellt. Ein möglicher Nachteil besteht in der Versuchung, nun alles auf diesem "Alleskönner" durchführen zu wollen. Wieder liegt es an uns Lehrern, einem sinnhaften und zweckmäßigen Gebrauch das Wort zu reden, nicht zuletzt auch im Hinblick auf die Dokumentierbarkeit unseres Unterrichts und Unterrichtsertrages.

Die folgenden Beispiele aus [L4] (dem im Herbst 97 erschienenen Zusatzband zu Reichel-Müller-Hanisch: Lehrbuch der Mathematik Bd. 1-4 für die Oberstufe der AHS) und [L1] sollen zeigen, dass die Dokumentation der Lösung einer Aufgabe durchaus unterschiedlich zum Gewohnten sein wird (müssen), wobei - und das war doch eine der Hauptforderungen des nun fast 10 Jahre gültigen Oberstufenlehrplans - nun *Kreativität* und *kritischem Denken, Vermuten* und *Beweisen, Darstellen* und *Interpretieren,* den *Lösungsideen* und *Lösungswegen* auf Kosten ihrer Durchführung mehr Platz und Bedeutung wird eingeräumt werden (können oder sogar müssen). Nur so wird man der unleugbaren - aber nicht neuen ! - Gefahr einer Vertrauensseligkeit im Sinn einer bequemen "Wird schon stimmen"-Mentalität bis hin zur vollkommenen Abhängigkeit begegnen können.

Beispiele aus dem Unterricht und für den Unterricht

Vertrauen in die Richtigkeit der gelieferten Ergebnisse, ohne das man ja im Extremfall doppelte Arbeit statt Arbeitsersparnis hätte, ist notwendig und - von Einzelfällen abgesehen - auch vollkommen berechtigt. Wer würde sonst ein solches Gerät kaufen und - so wie ich - zum absoluten Fan werden. Dennoch muss, wie die folgenden Beispiele aus dem Unterricht zeigen, je nach Aufgabentyp den Ergebnissen mit systematischen Kontrollen bis hin zu einer gesunden und vernünftigen Skepsis begegnet werden. Dabei werden wir sehen, dass meist der Benutzer durch Fehlbedienung der Verursacher von Fehlern bzw. Fehlfunktionen ist - aber nicht immer:

Beispiel A: Berechne p und x_2 für die Gleichung x^2-px+4=0 mit x_1=2 für G=ℝ!

Lösung: Fig.1 zeigt die Eingabe und die "Lösung" dieser Aufgabe aus dem Buch der 5. Klasse!

Vife Schüler konnten die Aufgabe natürlich im Kopf rechnen: p=4 und x_2=x_1=2. Staunend über das eigenartige erste Ergebnis konnten sie daraus mittels Division von 8 durch 2 selbst die gesuchte Lösung p=4 berechnen und diese zur Berechnung von x_2 einsetzen. Wieder war das Ergebnis unerwartet kompliziert, konnte jedoch wegen px=8 händisch zu "x=-2 or x=2" vereinfacht werden, mit dem Problem, dass -2 sicher keine Lösung ist!

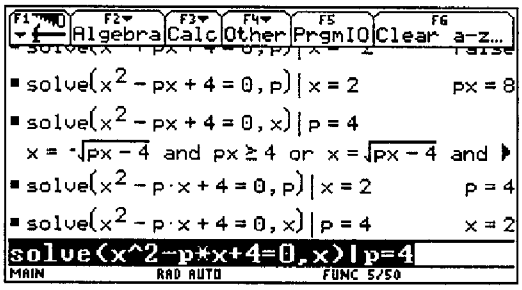

Fig. 1

Spätestens hier musste auffallen, dass die Fehleingabe px statt p*x zu diesem Schlamassel geführt hat; der TI-92 war schuldlos.

Beispiel B: Leite mittels SOLVE (F2 1) für die Gleichung ax^2+bx+c=0 eine allgemeine (die sogenannte Große) Lösungsformel her!

Lösung: Fig.2 zeigt das Mißlingen; aus dem Ergebnis FALSE muss geschlossen werden, dass die Gleichung unabhängig von der Wahl von a, b und c unlösbar ist.

Diesmal haben die Schüler aufgepasst; die Multiplikationssternchen zwischen der Unbekannten x und den Koeffizienten a und b wurden geschrieben. Nicht beachtet wurde, dass im Verlauf früherer Stunden die Formvariablen a, b und c schon mit Werten belegt worden sind, die hier zu einer unlösbaren Gleichung führten. Erst nach Löschen dieser Variablen mittels DELVAR (F4 4) erschien eine richtige Formel, die allerdings noch der in den Formelsammlungen angegebenen üblichen Form angeglichen werden musste.

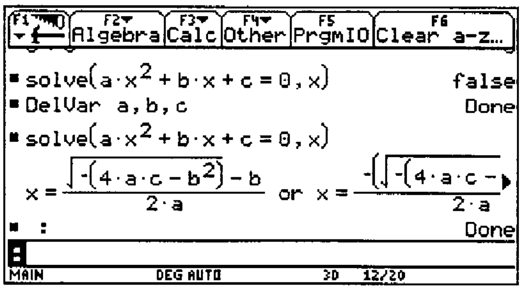

Fig. 2

Beispiel C: Löse die Gleichung $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$!

Lösung: Wieder erhält man FALSE als Ergebnis. Diesmal ist aber alles glatt gegangen, weil wirklich keine reellen Lösungen auftreten. Hier wird unsere Skepsis durch Vorkenntnisse aus DERIVE geschürt, wo SOLVE automatisch die Grundmenge G=ℂ vorwählt und damit "stets" Lösungen zeigt!

Fig. 3 zeigt die (unvollständig abgebildeten) approximierten bzw. exakten Lösungen der Aufgabe, wie sie mittels DERIVE for WINDOWS berechnet wurden:

$$[x = -0.222520 + 0.974927\cdot i,\ x = -0.222520 - 0.974927\cdot i,\ x = 0.623489 + 0.781831\cdot i,\ x = 0.623489 - 0.781831\cdot i,$$

$$\left[x = -\frac{\sqrt{7}\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} - \frac{1}{6} + \frac{7^{1/4}\cdot i\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{7}\cdot \mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot \mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right) - 4\cdot \mathrm{SIN}\left(\frac{\mathrm{ATAN}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right) + 3\cdot\sqrt{7}}}{6},\ x = -\right.$$

Fig. 3

Beispiel D: Überprüfe, ob $2^{101}-1$ eine Primzahl ist!

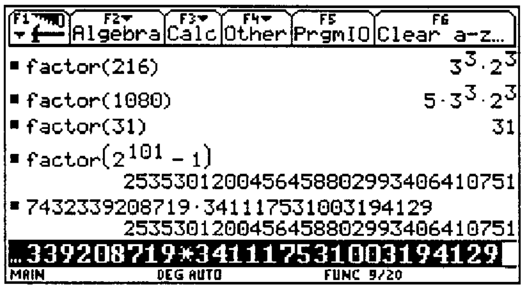

Fig. 4

Lösung: Mittels FACTOR lassen sich Primfaktorzerlegungen am TI-92 sehr leicht durchführen. Ist eine Zahl - wie z.B. 216 - keine Primzahl, so wird ihre Faktorenzerlegung angegeben. Ist eine Zahl - wie z.B. 31 - eine Primzahl, so wird nur sie alleine (ohne 1) als "triviale" Faktordarstellung angegeben. Demgemäß müßte man aus Fig. 4 schließen, daß $2^{101}-1$ eine Primzahl ist. Doch das ist falsch! DERIVE for WINDOWS liefert (nach einiger Wartezeit!) eine Zerlegung in zwei Faktoren (Primzahlen), deren Produkt man zur Kontrolle (am TI-92) bilden kann.

Der Grund für die Fehlfunktion liegt meines Wissens darin, dass bei der Primzahlüberprüfung aus Geschwindigkeitsgründen zum Teil mit stochastischen Methoden gearbeitet wird, die allerdings hin und wieder versagen können - Gott sei Dank aber erst bei derartig riesigen Zahlen. Dennoch: für wissenschaftliche Zwecke ist dies ein ernstes Problem, für die Schule eher eine (willkommene!) Gelegenheit, den Wahrheitsanspruch der Mathematik zu thematisieren und zu hinterfragen.

Beispiel E: Löse in Abhängigkeit von der Formvariablen k das Gleichungssystem

2x+6y-3z=-6

4x+3y+3z=6

4x-3y+9z=k

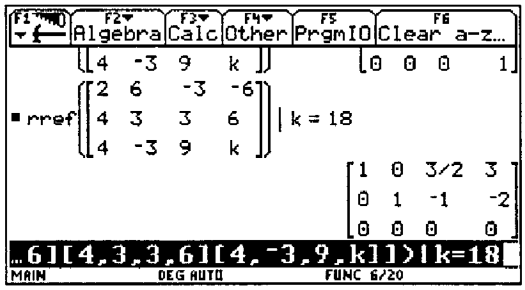

Fig. 5

Lösung: Die Auflösung des Systems mit Hilfe der Funktion SIMULT liefert das nicht sehr aufschlussreiche Ergebnis "Singuläre Matrix". Nach Überführung des Systems in die Stufenform (obere Halbdiagonalmatrixform) mittels der Funktion RREF kann aus deren letzter Zeile 0*x+0*y+0*z=1 geschlossen werden, dass das System für jedes k unlösbar ist. Dies ist aber falsch!

Für k=18 ergibt sich nämlich die Ausgangsgleichung III als die folgende Linearkombination der Ausgangsgleichungen I und II:

-4/3*I+5/3*II=III.

Demgemäß hat das System sogar eine einparametrige Lösung, also unendlich viele Lösungen in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$! Hier hat DERIVE das versäumt, was wir von unseren Schülern stets mit gutem Grund verlangen - eine Fallunterscheidung durchzuführen.

Beispiel F: Vereinfache (x+2) ^ (1/3)+(8x+16) ^ (1/3)-(27x+54) ^ (1/3) (1) allgemein, (2) für $x=\sqrt{2}$ sowie (3) für x=i !

Lösung: Gemäß Fig. 6 ist diese Aufgabe für den TI-92 kein Problem, nicht einmal für x=i.

Warum ich dieses Beispiel dennoch hier aufgenommen habe, liegt daran, dass der "größere Bruder" DERIVE for WINDOWS zwar Aufgabe (1) anstandslos ausführt, aber nicht Aufgabe (2); dort wird nicht zu 0 vereinfacht, obwohl (hoffentlich!) jeder Schüler durch Herausheben erkennt, dass 1*Wurzelausdruck + 2*Wurzelausdruck - 3*Wurzelausdruck stets 0 ist, unabhängig vom jeweiligen Wert von x! Die Implementation von DERIVE am TI-92 ist also nicht immer Zweiter gegenüber der Implementation von DERIVE am PC, wie man vielleicht - fälschlich - aus Beispiel D schließen könnte!

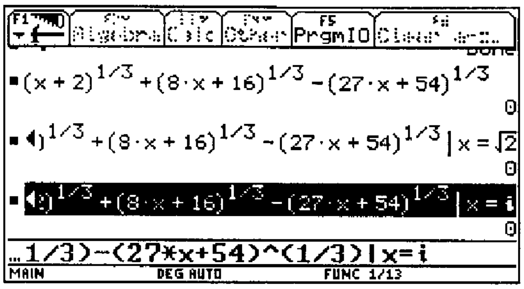

Fig. 6

Beispiel G: Zeichne den Graphen von y=ln(x-2)-ln(x-4)!

Lösung: Eingabe von GRAPH LN(x-2)-LN(x-4) in der Autorzeile liefert Fig. 7. Der angezeigte Graph ist jedoch falsch! Laut Definitionsmenge muß x>2 und x>4 sein, also D_f=] 4;∞ [, sodass nur der rechte Ast der Kurve richtig ist.

Der Grund dafür liegt in einer automatischen Umformung des Funktionsterms zu LN((x-2)/(x-4)). Durch Auflösen der Bruchungleichung (x-2)/(x-4)>0 erhält man tatsächlich als dessen Definitionsmenge den Bereich]-∞;2[∪]4;∞[und damit die aus zwei Ästen bestehende Kurve.

Will man den "korrekten" Graphen angezeigt erhalten (Fig. 8), so muss man die richtige Definitionsmenge mittels des Wobei-Operators in der Form GRAPH LN(x-2)-LN(x-4) | x>4 übergeben.

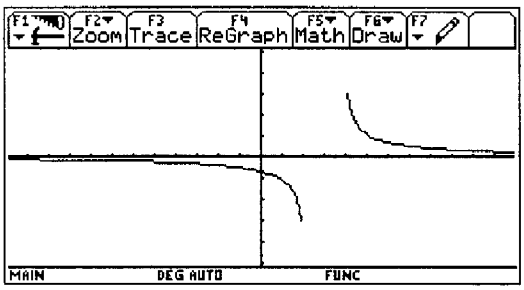

Fig. 7

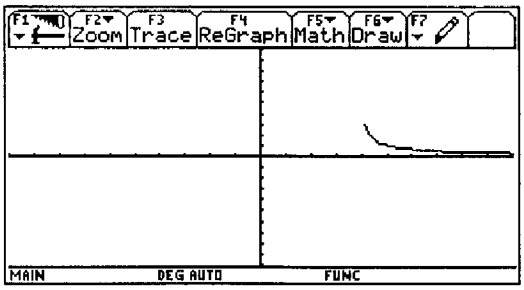

Fig.8

Beispiel H: Faktorisiere den Ausdruck $\sqrt{x^2 - 1}$!

Lösung: Jeder Schüler sollte dies können: $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$. DERIVE und auch der TI-92 können dies nicht!

Man sieht: Einfache Umformungen und Nachdenken (darüber) sind auch im Zeitalter des TI-92 nach wie vor gefragt, genauso wie Lehrer, welche die Schüler dabei unterstützen.

Beispiel I: Leite eine Formel für die Summe der Quadrate aller natürlichen Zahlen von 1 bis n her!

Lösung: Mittels des TI-92 ist dies ersichtlich in einer Minute geschehen (Fig. 9). Eingabe von

Σ(i ^ 2,i,1,n) in der Autorzeile liefert $\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

Aber was ist damit wirklich erreicht worden? War wirklich die Formel, die in praktisch jeder Formelsammlung nachgeschlagen werden kann, das eigentliche und zentrale Ziel dieser Übungsaufgabe? Natürlich nicht!

Vielmehr ging es um zweierlei: Erstens darum, eine Formel(vermutung) zu *gewinnen* (wobei die Ermittlung der Formel mittels des TI-92 meines Erachtens eine höherwertige Fähigkeit darstellt als diese in einer Formelsammlung nachzuschlagen), und zweitens darum, diese Formel zu *beweisen*.

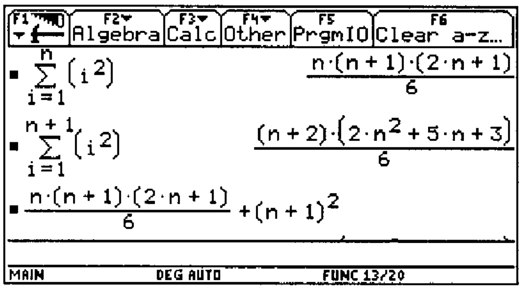

Fig. 9

Zu meiner Schulzeit war es noch so, dass entweder nur auf den Beweis Wert gelegt wurde (um das Ritual der vollständigen (mathematischen) Induktion zu üben) oder aber auf die Herleitung der Formel (mittels der Theorie der arithmetischen Folgen höherer Ordnung, um eben diese hier notwendige Theorie zu vermitteln - denn kaum einer wird die Formel nur durch "Vermuten" finden!

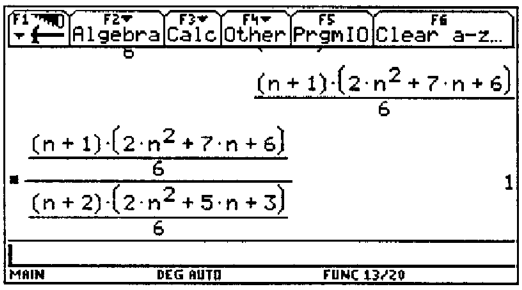

Fig. 10

Beim Beweis geht es meines Erachtens mehr um die *Idee* denn um die Durchführung (auch wenn diese eine gute Übung im algebraischen Rechnen darstellen mag)! Daher kann und soll man die Fähigkeiten des TI-92 beim symbolischen Rechnen wieder zum Umformen und beim Beweis der Gleichheit der beiden Ausdrücke benützen: ersichtlich (Fig. 10) ist deren Quotient tatsächlich 1 für alle $n \in \mathbb{N}$.

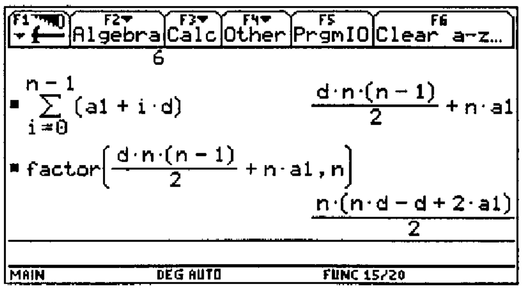

Fig. 11

Nach dem gleichen Verfahren könnte man nun auch die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge herleiten Der Rechner liefert hingegen eine Formel (Fig.11), wie sie so nicht in den Formelsammlungen steht; als kreative Tätigkeit bliebe für den Schüler das Interpretieren dieser Formel (n-mal der "Sockelwert" plus eine mit null beginnende arithmetische Folge) oder das Finden einer geeigneten Umformungskette zur gewohnten Formel (Fig. 11) samt deren Interpretation.

Diese Vorgangsweise will ich jedoch nicht uneingeschränkt empfehlen. Denn bei den arithmetischen Reihen geht es meines Erachtens weniger um eine Herleitung einer Formel mit dem TI-92 und um deren Interpretation, sondern viel mehr um die "Eigenart" der arithmetischen Folge, aus der man rein geometrisch (äquivalent zum bekannten Trick von GAUSS für die Berechnung der Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100) die übliche Summenformel unmittelbar "erkennen" kann. Der folgende Auszug aus dem Lehrbuch [Bd 2 von L4] soll dieses Anliegen verdeutlichen (Fig. 12):

Summenformel bei arithmetischen Folgen – Arithmetische Reihen

Wenn $\langle a_n \rangle$ eine arithmetische Folge ist, nennt man die Summe $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ eine **endliche arithmetische Reihe.**

711 Berechne durch Zusammenfassen des ersten und letzten, des zweiten und zweitletzten usw. Gliedes!

(**1**) $s = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 98 + 99 + 100$

(**2**) $s' = 2 + 4 + 6 + \ldots + 96 + 98 + 100$

(**3**) Beweise unter Verallgemeinerung von (**1**) und (**2**) die nachfolgende Summenformel!

(**4**) Drücke die nachfolgende Formel in Worten aus!

(**5**) Finde den Zusammenhang zwischen der folgenden Formel und Fig. 6.4!

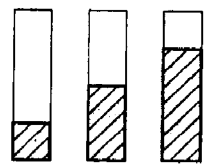

Fig. 6.4

Summenformel der endlichen arithmetischen Reihe:

Die arithmetische Folge $\langle a_1; a_2; \ldots; a_n \rangle$ hat die Summe $s_n = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

Fig. 12

Ich hoffe, mit diesen wenigen Beispielen einige Anregungen für einen begeisterten und dennoch nicht unkritischen Einsatz des TI-92 gegeben zu haben.

Literatur:

L1: Böhm, J. (Hrsg.): DERIVE-Newsletters +TI-92 Heft1 - Heft 25

Selbstverlag, Würmla, 1991-1997

(Im User-Forum sind zahlreiche der hier angesprochenen Probleme diskutiert worden; da eine eindeutige Zuordnung ihrer "Urheberschaft" zu einzelnen Personen oft nicht möglich ist, wird hier nur pauschal auf diese Reihe verwiesen.)

L2: Kutzler, B.: Symbolrechner TI-92

Verl. Addison-Wesley, 1996

L3: Reichel, H.-Chr. (Hrsg.): Computereinsatz im Mathematikunterricht

BI-Wissenschaftsverlag, Wien, 1995

L4: Reichel, H.-Chr., Müller, R., Hanisch, G., u.a.: Lehrbuch der Mathematik Bd.1 bis 4 samt TI-92-Zusatzband

Verl. hpt, Wien, 1989-1992 und 1997

(Der Zusatzband ist eine streng an den Kapiteln der Bücher orientierte Hilfestellung für den gesamten Lehrgang.)

L5: Scheu, G.: Texas Instruments neuer TI-92

in: PM 3/38 Jg. 1996

(Kurze Vorstellung einiger Möglichkeiten des Gerätes, geeignet etwa für Elterninformationen.)

L6: Texas Instruments: TI-Nachrichten für die Schule

Eigenverlag, Periodische Zeitung

(Enthält u.a. auch Unterrichtsvorschläge für den unterrichtspraktischen Einsatz des TI-92.)